

# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Vorbemerkungen</b>	<b>2</b>
<b>II</b>	<b>Optik</b>	<b>2</b>
1	Licht	2
2	Geometrische Optik	15
3	Optische Instrumente	17
<b>III</b>	<b>Wellenoptik</b>	<b>18</b>
4	Interferenz und Beugung	18
<b>IV</b>	<b>Hinweise auf die Quantenstruktur der Natur</b>	<b>26</b>
5	Photonen	26
6	Elektronen	32
<b>V</b>	<b>Atome und Ionen</b>	<b>35</b>
7	Massen von Atomen	35
8	Methoden zur Bestimmung von $N_A$	36
9	Abbildung einzelner Atome	37
10	Rastersondenverfahren	37
<b>VI</b>	<b>Wellenmechanik</b>	<b>38</b>
11	foo	38
12	Wellenpakete	39
13	Unschärferelation	40
14	Schrödingergleichung	40

# Teil I

## Vorbemerkungen

www.ep2.physik.uni-wuerzburg.de Übung: Dr. A. Schöll, PD Dr. C. Kumpf schoell@kumpf@ 90 Min, Ziele: 1. aktive Verarbeitung Vorlesungsstoff 2. Vertiefung / Ergänzung Erste Übung: 24.+25.10. Übungen entfallen am 31.10.+1.11.

Übungsschein: Zulassung zur Klausur: erfolgreiche Teilnahme an den Übungen Anwesenheit in den Übungen (Bei Verhinderung VORHER mit dem ÜbL sprechen) 2/3 der Punkte aus Übungen Punkte gibt es für das Ankreuzen von bearbeiteten Übungsaufgaben Ankreuzen und nicht vorrechnen => Punktabzug für mind. 1 Übungsblatt 3 x Vorrechnen in der Übungsgruppe Zulassung zur Klausur ist 6 Monate gültig Klausur: voraussichtlich am Montag 11.2.2008, Dauer 90 Min Kriterium für das Bestehen: 50% der max. erreichbaren Punktzahl Nichtteilnahme ist nicht bestanden erlaubte Hilfsmittel: TR, Geodreieck, Lineal, Zirkel Nachklausur: Beginn SS08 Teilnehmen darf nur, wer Klausur nicht bestanden hat (Keine Notenverbesserung)

Zugang zur Website: Login: EPII\_Student Passwort: OWTA

# Teil II

## Optik

### 1 Licht

Interferenzversuch: Einfachspalt, Halbdurchlässiger Spiegel -Abbildung auf Wand -Abbildung des Beugungsbildes

Vorstellung der verschiedenen Effekte im Rahmen der Optik

### Geschichte der Optik

Folie!

### Frage nach der Natur des Lichtes

Neuzeit: Teilchen oder Welle?

18. Jhd. Teilchentheorie (Newton)

Reflexion und Brechung erklärbar

Annahme:  $c_{\text{Glas}} > c_{\text{Luft}}$

Wellentheorie (Huygens, Hooke)

Reflexion, Brechung und Beugung erklärbar

Annahme:  $c_{\text{Glas}} < c_{\text{Luft}}$

1801: Interferenz ist ein Wellenphänomen (Young)

Beugungsexperimente (Fresnel)

→ neuer Auftrieb für die Wellentheorie

1850: Messung:  $c_{Wasser} < c_{Luft}$  (Foucault, Drehspiegel)

→ Bestätigung der Wellentheorie

1860: Theorie der elektromagnetischen Strahlung (Maxwell)

$c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} = \text{Lichtgeschwindigkeit}$

1887: experimentelle Bestätigung (Hertz)

→ viele weitere Experimente bestätigen Wellencharakter

Problem: Wellennatur beschreibt die Wechselwirkung mit Materie nicht!

z.B. Experimente zum Lichtelektrischen Effekt (Photoeffekt) widersprachen Wellencharakter

→ nur im Teilchenbild erklärbar (1905 Einstein) ⇒ doch Teilchen

Lichtteilchen = Photonen

$$E = h\nu$$

$h$  = Plancksches Wirkungsquantum

$\nu$  Frequenz

nach 1920: umfassendes Verständnis ⇒ WELLE-TEILCHEN-DUALISMUS

## Lichtgeschwindigkeit

$$c = 299792458 \frac{m}{s}$$

(im Vakuum)

→ Definitionswert, daraus  $\lambda = \frac{c}{\nu}$

⇒ Definition des Meters

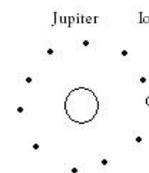
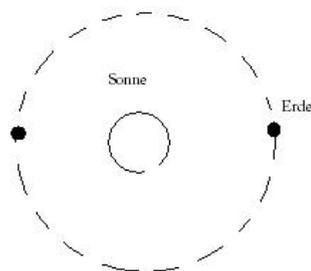
gilt für alle elektromagnetischen Wellen im Vakuum

(  $3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$  )

Erstes Experiment: Gallilei, 2 Berge mit Laternen ... Reaktionszeit grösser als Lichtzeit

Erste erfolgreiche Experimente:

1675 Ole Römer aus astronomischen Messungen



Jupiter und Io

Verdunklung halbes Jahr später findet 16,6 Minuten später

42,5 h Zeit zwischen zwei Verfinsterungen

Durchmesser Erdumlaufbahn =  $3 \cdot 10^8 \text{ m} \Rightarrow 1000 \text{ s} \Rightarrow 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

1849 Zahnradmethode (Fizeau)

Prinzip durch Galilei  $\rightarrow$  Assistent durch Spiegel ersetzt

-> Folie

zurückgelegte Strecke  $2 \cdot s$  (s=Abstand Zahnrad-Spiegel)

Zeit Länge zu Länge  $T = \frac{1}{\nu z}$   $\nu$  = Rotationsfrequenz, z Anzahl der Zähne

$$c = \frac{2s}{T}$$

Fizeau: 8,6 km, z=720

## Drehspiegelmethode (Foucault)

genauer als Zahnradverfahren

Messung kürzerer Entfernungen möglich

-> Folie

Messung der Lichtgeschwindigkeit in Medium möglich, z.B. Wasser  $\rightarrow c_{\text{Wasser}} > c_{\text{Luft}}$

$\rightarrow$  Wellentheorie bestätigt!

## Andere Methoden: Aus Maxwell-Gleichungen

$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$   $\epsilon_0$  : Dielektrizitätskonstante (aus Kapazitätsmessung beim Kondensator)

$\mu_0$ : magnetische Feldkonstante (über Definition der Stromstärkeinheit festgelegt)

## Heutige Verfahren

Laser - Resonanz

## Huygenssche Prinzip

Wellenfront: Fläche, deren Punkte in gleicher Phase schwingen

Zeit  $t \rightarrow$  Radius  $r$

Zeit  $t + \Delta t \rightarrow$  Radius  $r + c \cdot \Delta t$

Lichtstrahl: Linie senkrecht zur Wellenfront

-> Folie

Huygensches Prinzip (1678):

Jeder Punkt einer bestehenden Wellenfront ist Ausgangspunkt einer neuen kugelförmigen Elementarwelle, die die gleiche Ausbreitungsgeschwindigkeit und Frequenz wie die ursprüngliche Wellenfront hat. Die Einhüllende aller Elementarwellen ergibt die Wellenfront zu einem späteren Zeitpunkt.

Problem bei Huygens: Es gibt auch zurücklaufende Wellen

Fresnel Lösung: Berücksichtigung von Intensität und Phase

$\rightarrow$  Huygens-Fresnelsches Prinzip

zurücklaufende Welle hat \*keine\* Intensität

## Reflexion

Licht trifft auf Grenzfläche zwischen zwei unterschiedlichen Medien  
ein Teil der Welle (Wellenenergie) wird zurückgeworfen

dringt nicht durch diese Grenzschicht durch

→ Reflexion, Spiegelung

ein teil geht unter Änderung der Ausbreitungsrichtung in das Medium über

→ Refraktion, Brechung

Skizze2

$\alpha$ : Einfallswinkel

$\alpha'$ : Reflexionswinkel

$\beta$ : Brechungswinkel

Einfallsebene: wird durch einfallenden Strahl und Oberflächennormale  $\vec{n}$

Reflexionsgesetz:  $\alpha = \alpha'$

Herleitung aus Huygensschem Prinzip

Skizze3

$t_{D \rightarrow B} = t_{A \rightarrow E}$

$\vec{DB} = \vec{AE}$

→  $\triangle ABD = \triangle ABE$  (kongruent) →  $\angle BAD = \angle ABE$

Arten der *Reflexion*

reguläre Reflexion (*spiegelnde Reflexion*)

→ Reflexion an spiegelnden Oberflächen -> rau in Längenskala der Lichtwellenlänge

diffuse Reflexion (*Remission, Streuung*)

→ raue Oberflächen

spiegelnde Reflexion

Skizze - Spiegel

diffuse Reflexion

Skizze - Papier

diffus mit spiegelndem Anteil

Skizze - Holzplatte

## Brechung

*Grenzflächeneffekt*

Skizze

Ursache für Brechung: Änderung der Ausbreitungsgeschwindigkeit

Ausbreitungsgeschwindigkeit im Medium ist charakterisiert über seine Brechzahl  $n$ :

$$n = \frac{c}{c_m} \left( \begin{array}{l} \text{Lichtgeschwindigkeit im Vakuum} \\ \text{Lichtgeschwindigkeit im Medium} \end{array} \right)$$

im Allgemeinen  $n \geq 1$

optisch dichter > grössere Brechzahl

Frequenz ändert sich beim Übergang in Medium II nicht → Wellenlänge ändert sich

$$\rightarrow \lambda' = \frac{c_m}{\nu} = \frac{c}{\nu} \cdot \frac{1}{n} = \frac{\lambda_{vac}}{n}$$

Übergang in *optisch dichteres Medium*

Skizze  $\alpha > \beta$

$n_2 > n_1$  Brechung zum Lot

Übergang in *optisch dünneres Medium*

$n_1 > n_2$  Brechung vom Lot weg

Skizze

$\beta > \alpha$

## Herleitung des Brechungsgesetzes aus Huygenschem Prinzip

Skizze

$$\vec{EB} = c_1 \cdot t \text{ in Medium 1}$$

$$\vec{AB}' = c_2 \cdot t \text{ in Medium 2}$$

$$\vec{EB} = \vec{AB} \cdot \sin\alpha$$

$$\vec{AB}' = \vec{AB} \cdot \sin\beta$$

$$\frac{\vec{EB}}{\vec{AB}'} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$n_1 \cdot \sin\alpha = n_2 \cdot \sin\beta \quad (1)$$

Brechungsgesetz von *Snellius* (1621)

## Die planparallele Platte

Lichtstrahl trifft schräg auf planparallele Platte  
beim Eintritt in die Platte wird er zum Einfallslot hingebrochen

$$p = \frac{d}{\cos\beta} \cdot \sin(\alpha - \beta)$$

## Totalreflexion

Skizze

mit zunehmendem  $\alpha$  wird auch  $\beta$  immer größer

Kritischer Einfallswinkel  $\alpha_K : \beta = 90 \text{ deg}$

bei  $\alpha > \alpha_K$  : keine Brechung, ausschließlich Reflexion zurück ins dichtere Medium  $\rightarrow$   
*Totalreflexion*

Mit Brechungsgesetz:  $\beta = 90 \text{ deg} \rightarrow \sin\beta = 1$

$\sin\alpha_K = \frac{n_2}{n_1}$   $\alpha_K$  = kritischer Winkel der Totalreflexion (nur für  $n_2 < n_1$ )

Beispiel: Übergang Glas-Luft ( $n_{\text{Glas}} \approx 1,5$ )

$\rightarrow \alpha_K = 42 \text{ deg}$

Wichtig für optische Elemente  $\rightarrow$  verlustfreie Umlenkung von Licht

Prisma:

*Spiegelprisma*

Skizze4

*Umkehrprisma*

Skizze5

*Diamant*

$n = 2,4 \rightarrow \alpha_K = 25$

$\rightarrow$  nahezu alles eintretende Licht wird totalreflektiert  $\rightarrow$  'Funkeln'

Nutzung der Totalreflexion:

*Glasfaserkabel*

Folie

Reifegrad von Trauben

Abbe-Refraktometer

Skizze

Aus Wellenoptik: Endliche Eindringungswahrscheinlichkeit bei Totalreflexion  $\propto e^{-\frac{d}{\lambda}}$

$\lambda$ : Wellenlänge,  $d$ : Abstand zur Grenzfläche  
frustrierte Totalreflexion

## Dispersion

Dispersion ist Abhängigkeit der Brechzahl von der Wellenlänge oder Frequenz des Lichtes.

⇒ Abhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit von  $\lambda$  bzw.  $\nu$ .

*Normale Dispersion:*  $\frac{dn}{d\lambda} < 0$  bzw.  $\frac{dn}{d\lambda} > 0$

Skizze 7

*Anormale Dispersion:*

Skizze 8

Im Vakuum:

keine Dispersion für EM-Strahlung  $\frac{dn}{d\lambda} = 0$

In Glas: unterschiedliche Wellenlängen werden unterschiedlich stark gebrochen

→ Brechzahl im Glas nimmt langsam mit  $\lambda$  ab.

Skizze 9

Spektrale Zerlegung des einfallenden Lichtstrahls

blau wird bei normaler Dispersion stärker abgelenkt.

Experiment Prisma an Overheadlicht (dünner Spalt)

Brechzahlen einiger Substanzen für gelbes Natriumlicht (589 nm):

Substanz	Brechzahl
Diamant	2,417
Quarz	1,544
Glas	1,4-1,7
Wasser	1,333
Luft	1,00024

## Effekte zur Dispersion

*Regenbogenentstehung*

Folie

## Fermatsches Prinzip

Das Fermatsche Prinzip ist eine alternative Möglichkeit, die Ausbreitung des Lichtes (und andere Wellen) zu beschreiben.

*Licht legt zwischen zwei Punkten A und B jenen Weg zurück, für den es die kürzesten Zeit benötigt.*

d.h.  $\frac{dt}{dx} = 0 \rightarrow t(x)$  hat Extremum.

Beispiel

Reflexion:

$$t = \frac{S_A}{c_1} + \frac{S_{A'}}{c_1} = \frac{1}{c_1} \cdot (\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{(d-x)^2 + a'^2})$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c_1} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{1}{c_1} \cdot \frac{2(d-x)}{2\sqrt{(d-x)^2+a'^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{S_A} - \frac{d-x}{S_{A'}}$$

$$\sin\alpha - \sin\alpha' = 0$$

$$\alpha = \alpha' \text{ Reflexionsgesetz}$$

Brechung:

$$t = \frac{S_A}{c_1} + \frac{S_B}{c_2} = \frac{1}{c_1} \cdot \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{1}{c_2} \cdot \sqrt{(d-x)^2 + b^2}$$
$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c_1} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{1}{c_2} \cdot \frac{2(d-x)}{2\sqrt{(d-x)^2+b^2}} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{c_1} - \frac{\sin\beta}{c_2} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1} \text{ Brechungsgesetz}$$

## Polarisation

### Beschreibung einer Welle

$$\vec{E}(z, t) = \vec{e}_0 \cdot \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$$

$$\vec{E}(z, t) = \vec{e}_0 \cdot \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r})$$

$$\vec{E}(z, t) = \vec{e}_0 \cdot e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

Licht ist eine *transversale* EM-Welle, d.h. elektrischer und magnetischer Feldvektor stehen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung.

$$\vec{E} \perp \vec{k}$$

$$\vec{B} \perp \vec{k}$$

$$\vec{E} \perp \vec{B}$$

### linear polarisiertes Licht

Elektrischer Feldvektor schwingt nur in einer Richtung (senkrecht zur Ausbreitungsrichtung)  $\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$

### unpolarisiertes Licht

Überlagerung von polarisiertem Licht mit statistischer Orientierung

### zirkular polarisiertes Licht

Spitze des Feldvektors läuft auf Kreis um die Ausbreitungsrichtung (Zylindermantel  $\rightarrow$  Spirale)

links- und rechtszirkular  $\vec{E} = E_0(\cos \omega t - kz, \sin \omega t - kz)$  Kann aus zwei um  $\frac{\pi}{2}$  phasenverschoben, senkrecht zueinander stehende linear polarisierten Wellen gleicher Amplitude zusammengesetzt werden.  $\vec{E}(z, t) = (E_x \vec{e}_x + i E_y \vec{e}_y) e^{-i(\omega t - kz)}$   
 $= E_x \vec{e}_x e^{-i(\omega t - kz)} + E_y \vec{e}_y e^{-i(\omega t - kz)} e^{i\frac{\pi}{2}}$

### Elliptisch polarisiertes Licht

Elliptisch polarisiertes Licht ist wie zirkular polarisiert, aber Umlauf auf Ellipse, d.h.  $E_x \neq E_y$

### Erzeugung von polarisiertem Licht

### Polarisation durch Absorption

- Bestimmte Kristalle (dichromatisch, dichroitisch) lassen entlang bestimmter Kristallrichtungen nur Licht einer bestimmten Polarisation durch andere Polarisationsrichtung werden absorbiert.
- Folien aus langkettigen Molekülen (Kohlenwasserstoffe mit bestimmter Ausrichtung) absorbieren parallel zur Kette

Definition Polarisationsachse: Richtung des elektrischen Feldvektors, für den das Licht durchgelassen wird.

**Gesetz von Malus:**  $J = J_0 \cdot \cos^2 \theta$

**Polarisation durch Reflexion** Reflexion von unpolarisiertem Licht an Grenzfläche  $\rightarrow$  reflektiertes Licht ist teilweise polarisiert

- hängt von Einfallrichtung und von den Brechzahlen ab

Sonderfall: Polarisationswinkel  $\alpha_p$ : reflektierter und gebrochener Strahl stehen senkrecht zueinander

- reflektierter Strahl ist vollständig s-polarisiert
- gebrochener Strahl ist teilweise p-polarisiert

Snellius:  $\alpha = \alpha_p; \beta = 90 \text{ deg} - \alpha_p$

$$n_1 \sin \alpha_p = n_2 \sin(90 \text{ deg} - \alpha_p)$$

$$\leftrightarrow n_1 \sin \alpha_p = n_2 \cos(\alpha_p)$$

$$\leftrightarrow \tan \alpha_p = \frac{n_2}{n_1}$$

$\alpha_p$  : Brewster-Winkel

Beispiel: Luft/Glas:  $\alpha_p = 56 \text{ deg}$

- elektrischer Feldvektor liegt in Einfallsebene (p-polarisiert)
- Schwingungen im Glas parallel zu  $\vec{E}$  (gebrochener Strahl)

$\rightarrow$  keine Abstrahlung in Richtung des reflektierten Strahls ( $\perp$  gebrochener  $\rightarrow$  Dipolstrahlung)

f) Polarisation durch Streuung

Streuung: Absorption und Wiederabstrahlung

Vorstellung: Molekül ist Dipolantenne  $\rightarrow$  Abstrahlung senkrecht zur Antennenachse (Dipolachse)

Unpolarisiertes Licht trifft auf Streuzentrum (Ausbreitung in z-Richtung)

- das elektrische Feld des unpolarisierten Lichtstrahls hat x- und y-Komponenten
- Streuzentrum wird zu Schwingungen in x- und y-Richtung angeregt.
- Schwingungen in x-Richtung  $\rightarrow$  Abstrahlung in y- und z-Richtung
- $\rightarrow$  Linear polarisiert in x-Richtung
- Schwingungen in y-Richtung  $\rightarrow$  Abstrahlung in x- und z-Richtung
- $\rightarrow$  Linear polarisiert in y-Richtung

	Negative Kristalle	Positive Kristalle
H	$c_{ao} \geq c_0$ $n_{ao} \leq n_0$	$c_{ao} \leq c_0$ $n_{ao} \geq n_0$

## Doppelbrechung

a)

- *optisch isotropes* Medium  
Lichtgeschwindigkeit ist in alle Raumrichtungen identisch.
- *optisch anisotropes* Medium (= *doppelbrechende* Medien)

Beim Eintritt eines Lichtstrahls in ein anisotropes Medium spaltet er in zwei Anteile auf. Beide Anteile sind *senkrecht* zueinander *linear* polarisiert. Ein Teil breitet sich isotrop aus ( $\vec{E} \perp$  optische Achse)  $\rightarrow$  ordentlicher Strahl (*o-Strahl*) Der andere Anteil breitet sich anisotrop aus

$\rightarrow$  auÄrder ordentlicher Strahl (*ao-Strahl*)  $\Rightarrow$  Wellenfronten sind Rotationsellipsoide

Optische Achse (*Kristallographische Hauptachse*): Richtung, in der o- und ao-Strahl gleiche Geschwindigkeiten haben.

*Hauptschnitt*: Ebene, die durch einfallenden Strahl und optische Achse aufgespannt wird. Man unterscheidet: einachsige negative und einachsige positive Kristalle

$\Rightarrow$  In jeder Richtung (auÄrder optische Achse) gibt es zwei Lichtanteile mit unterschiedlicher Brechzahl  $n_o = \frac{c}{c_0}$ ,  $n_{ao} = \frac{c}{c_{ao}}$   $\Rightarrow$  Doppelbrechung! (Snellius gilt nicht für ao-Strahl)

### Lichteinfall schräg zur optischen Achse

$\Rightarrow$  Räumliche Trennung von o- und ao-Strahl

$\Rightarrow$  Doppelbrechende Platte  $\rightarrow$  'doppelte Schrift'  $\rightarrow$  Nicolsches Prisma (Erzeugung von linear polarisiertem Licht)

## Elektromagnetische Theorie des Lichts

Wellengleichung (aus Maxwell-Gleichungen für isotropes Medium)  $\epsilon \neq 1$ ; relative Permeabilität  $\mu_r = 1$  (nicht magnetisches Medium)

$$\Delta \vec{E} - \epsilon \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \Delta \vec{B} - \epsilon \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

$$\text{Vakuumllichtgeschwindigkeit } c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}};$$

$$\text{Phasengeschwindigkeit im Medium } v_{ph} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu_r \epsilon_0 \mu_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon \mu_r}}$$

$$\text{Einfluss des Mediums: } \sqrt{\epsilon_r} = n \quad (\mu_r = 1)$$

$$\text{Einfachste Lösung. ebene Welle } \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \phi)$$

$$\vec{E}_c(\vec{r}, t) = \vec{E}_{c_0} e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \phi)} \quad (\text{komplex})$$

$$\text{Re}(\vec{E}_c) = \vec{E} \rightarrow \text{messbare GröÄre}$$

Einsetzen in Wellengleichung:  $\vec{k}^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = n^2 \frac{\omega^2}{c_0^2} = \frac{\omega^2}{c^2}$  Dispersionsrelation für Licht.

$$|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad \lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|} = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{c}{\nu}$$

Im Medium verändert werden:  $c, \lambda, \vec{k}$

## Frequenzabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten $\epsilon$

Oft als Konstante betrachtet  $\Rightarrow$  meist für kleinen  $\nu$ -Bereich weit weg von Resonanzen

Vergleich von  $n(589 \text{ nm})$  mit statischer DK  $n_0 = \sqrt{\epsilon_{\omega=0}}$

flüssiges Wasser:  $\sqrt{\epsilon_{\omega=0}} = 8,96$ ;  $n(589 \text{ nm}) = 1,33$

$\Rightarrow$  Frequenzabhängigkeit

Ursache: verschiedene mikroskopische Effekte 2 Beiträge: {  
 A) Orientierungspolarisation (permanente Dipole)  
 B) Verschiebungspolarisation (Verschiebungsladungen)

einfaches Modell:  $m_{Kern} = \infty$ , positiv geladen

$m_{Elektron} = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ,  $q = -e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$   $\rightarrow$  Berechnung des durch Auslenkung induzierten Dipolmomentes

$$\vec{F} = -e\vec{E}(t) = -e\vec{E}_0 \cdot e^{i\omega t}$$

= 1-dimensionaler harmonischer Oszillator

$\omega_0$ : Resonanzfrequenz;  $\gamma$ : Dämpfung

Ansatz:  $x(t) = x_0 \cdot e^{i\omega t}$  ( $\omega_0 = \frac{D}{m}$ )

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} F(t) = -e \frac{e}{m} \cdot \underbrace{E_0 \cdot e^{i\omega t}}$$

$\downarrow$  lösen =  $E(t)$

$$\Rightarrow x = -\frac{e}{m} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega} \cdot E(t)$$

Mit Teilchendichte  $N$  [ $\frac{\text{Atome}}{\text{Volumen}}$ ]

$$\Rightarrow \text{Polarisation: } \vec{P}(t) = -e\vec{x}(t) \cdot N = \frac{e^2 N}{m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \cdot E(t)$$

$$\left[ \vec{D} = \epsilon\epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} (\epsilon(\omega) - 1) \right]$$

$$\Rightarrow \epsilon(\omega) = 1 + \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \cdot E(t) \quad (2)$$

frequenzabhängige DK, komplexe Größe "Drude-Modell"

Bei mehreren verschiedenen Atomtypen:

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{e}{\epsilon_0 m} \cdot \sum_j \frac{n_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 + i\gamma_j \omega} \quad N_j: \text{Anzahl Atome von Typ } j \text{ pro Volumeneinheit}$$

## Brechungsindex

$$n = \sqrt{\epsilon}$$

für verdünnte Medien  $\epsilon \approx 1$

Taylor-Entwicklung der Wurzel:

$$n = \sqrt{\epsilon} = \sqrt{1 + (\epsilon - 1)} = 1 + \frac{1}{2}(\epsilon - 1) + \dots$$

$$\leftrightarrow 2(n - 1) = (\epsilon - 1)$$

$$\Rightarrow n - 1 = \frac{1}{2}(\epsilon(\omega) - 1) = \frac{e^2 N}{2\epsilon_0 m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$$

$$n_R = 1 + \frac{e^2 N}{2\epsilon_0 m} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

$$n_I = \frac{e^2 N}{2\epsilon_0 m} \cdot \frac{-\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

$n$  ist eine komplexe Größe!

## Absorption von Licht

Absorption: Prozess der Energieaufnahme (Energie eines Photons entspricht dem Unterschied zwischen dem Grund- und einem anderen angeregtem Zustand des Atoms)

- dissipative Absorption (Wärmeenergie entsteht)
- Nichtresonanzsprung: Frequenz des ankommenden Strahls niedriger als Resonanzfrequenz  $\rightarrow$  Elektronenwolke durch das elektromagnetische Feld in Schwingungen versetzt  $\rightarrow$  Schwingung relativ zum positiv geladenen Kern nicht mit  $\nu$  des einfallenden Strahls ( $\Rightarrow$  oszillierender Dipol)  $\rightarrow$  Erzeugung von Streulicht  $\rightarrow$  in zufälliger Richtungen und mit gleichem E-Vektor der eingestrahnten Photonen  $\rightarrow$  Ausgangspunkt kugelförmiger Elementarwellen
- Ebene Welle im Medium in z-Richtung  $n = n_R + n_I$   $k = \frac{n\omega}{c_0}$  Dispersionsrelation,  $c_0 =$  Vakuumslichtgeschwindigkeit  $E(z, t) = E_0 \cdot e^{i(\omega t - kz)}$   $\omega t =$  Änderung mit Zeit  $kz =$  Änderung mit Ort  $E(z, t) = E_0 \cdot e^{i\omega t - \frac{i\omega n_R}{c_0} z - i\frac{\omega n_I}{c_0} z} = E_0 \cdot e^{-\frac{\omega n_I}{c_0} z} e^{i\omega t - \frac{i\omega n_R}{c_0} z}$   
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Abklingen mit } z} \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{oszilliert in } \text{Ort und } \text{Zeit}} \rightarrow$  Amplitude der Welle exponentiell gedämpft  
 $I(z) = I_0 \cdot e^{-\alpha z}$  Bestrahlungsstärke ist dem Quadrat der Amplitude proportional  
 $= I_0 \cdot e^{\sigma N z}$

$\alpha = \frac{2\omega n_I}{c_0}$  Absorptions- bzw. Dämpfungskoeffizient

$z = \frac{1}{\alpha}$  Eindringtiefe

Strecke  $\frac{1}{\alpha} \rightarrow$  Fluiddichte um Faktor  $e^{-1}$  abgenommen

Das Material ist durchsichtig, wenn Eindringtiefe des betreffenden Strahls groß im Vergleich zur Dicke des Materials ist. Imaginärteil  $n_I$  bewirkt die Absorption  $\sigma$ :

Absorptionsquerschnitt  $\alpha = N \frac{l^2}{\epsilon_0 m_e c_0} \frac{\gamma \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$

$I(z) = I_0 \cdot e^{-\frac{2\omega n_I}{c_0} z} = I_0 \cdot e^{-\alpha z}$

$\alpha = 2\omega n_I c_0$

$\rightarrow$  Beuguer(Beer)-Lambert-Gesetz

Atome haben einen großen Absorptionsquerschnitt, d.h. sie treten mit resonantem Licht stark in Wechselwirkung, so dass die Sättigungsgrenze (unablässige Emission und Wiederanregung) eines Gases unter niedrigem Druck bereits bei mäßigen Bestrahlungsstärken (ca.  $10^2 \frac{W}{m^2}$ ) eintritt.

Transmission:  $\tau = \frac{I(z)}{I_0} = e^{-\alpha z}$

Konsequenzen:

$\omega > \omega_p : \epsilon > 0 \rightarrow n$  ist reell  $\rightarrow$  geringe Absorption, Material ist durchsichtig

$\omega < \omega_p : \epsilon < 0 \rightarrow n$  ist imaginär  $\rightarrow$  starke Absorption, Welle nimmt von der Grenzfläche ausgehend ab.

Bsp: Silber:  $N = 6 \cdot 10^{22} \frac{cm^3}{cm^3} \Rightarrow 1,38 \cdot 10^{16} Hz$

grünes Licht  $\lambda = 500 nm$   $\omega = 3,7 \cdot 10^{15} \frac{1}{s}$

$n_I = \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} = -3,53$

$\frac{1}{\alpha} = -\frac{c_0}{2\omega} \cdot \frac{1}{n_I} = \frac{\lambda}{4\pi n_I} = 11,3 nm$  Licht dringt nur wenig ein, Absorption in oberen Atomlagen

mittlere Eindringtiefe für Licht unterhalb der Plasmagrenze

## Elektromagnetische Wellen an Grenzflächen

Forderung: Maxwellgleichung erfüllt spezielle Randbedingungen (isotrop, nichtleitend, nicht magnetisch)

Tangentialkomponente von  $\vec{E}$  und von  $\vec{B}$  stetig!

Normalkomponente von  $\vec{E}$  und von  $\vec{B}$  stetig!

Hier betrachten wir  $\vec{E}$  an einer ebenen Grenzschrift zweier homogener Medien

(Skizzen) Einfallender Strahl

$$\vec{E}_e = \vec{E}_{0e} \cos(\vec{k}_e \vec{r} - \omega_e t) = \vec{E}_{0e} \cos(\phi_e)$$

Reflektierter Strahl

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} \cos(\vec{k}_r \vec{r} - \omega_r t + \phi_r) = \vec{E}_{0e} \cos(\phi_r)$$

Transmittierter Strahl

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} \cos(\vec{k}_t \vec{r} - \omega_t t + \phi_t) = \vec{E}_{0t} \cos(\phi_t)$$

$\vec{k}_e, \vec{k}_r, \vec{k}_t$  müssen jeweils Dispersionsrelation erfüllen

$\phi_r, \phi_t$  Phasenlänge relativ zur einfallenden Welle

→ Reflexions- und Brechungsgesetz

→ Stetigkeit der Tangentialkomponente

$$\vec{e}_z \times \vec{E}_e + \vec{e}_z \times \vec{E}_r = \vec{e}_z \times \vec{E}_t$$

$$E_{0,e,x} \cos \phi_e + E_{0,r,x} \cos \phi_r = E_{0,t,x} \cos \phi_t$$

$$E_{0,e,y} \cos \phi_e + E_{0,r,y} \cos \phi_r = E_{0,t,y} \cos \phi_t$$

notwendige Bedingung: Alle Phasen sind gleich  $\phi_e = \phi_r = \phi_t$

$$\vec{k}_e \vec{r} - \omega_e t = \vec{k}_r \vec{r} - \omega_r t + \phi_r = \vec{k}_t \vec{r} - \omega_t t + \phi_t$$

für alle  $\vec{r}$  in Grenzfläche ( $z=0$ ) und alle  $t$

⇒ alle Frequenzen müssen identisch sein.

$$\omega_e = \omega_r = \omega_t = \omega$$

(Frequenzen ändern sich beim Durchgang durch die Grenzfläche nicht)

Weiterhin muss gelten (für alle  $\vec{r}$  in Grenzfläche)

$$\text{Geradengleichung: } \vec{k}_e \vec{r} = \vec{k}_r \vec{r} + \phi_r \Leftrightarrow (\vec{k}_e - \vec{k}_r) \vec{r} = \phi_r \quad (\text{A})$$

$$\vec{k}_e \vec{r} = \vec{k}_t \vec{r} + \phi_t \Leftrightarrow (\vec{k}_e - \vec{k}_t) \vec{r} = \phi_t \quad (\text{B})$$

Ebene ist schon durch  $z=0$  festgelegt

$$(\vec{k}_e - \vec{k}_r) \perp \text{ zur Ebene mit } z=0$$

$$\Leftrightarrow (\vec{k}_e - \vec{k}_r) \parallel \vec{e}_z$$

$$(\vec{k}_e - \vec{k}_t) \perp \text{ zur Ebene mit } z=0$$

$$(\vec{k}_e - \vec{k}_t) \parallel \vec{e}_z$$

Aus (A) folgt Komponenten in Grenzfläche müssen identisch sein

$$k_e \sin \theta_e = k_r \sin \theta_r$$

$k_e$  und  $k_r$  sind im selben Medium → identische Dispersion:  $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{n_e^2 \omega^2}{c^2}$

$$k_e = k_r = \frac{n_e \omega}{c}$$

$$\Rightarrow \sin \theta_e = \sin \theta_r$$

$\theta_e = \theta_r$  Reflexionsgesetz

Aus (B) folgt: Komponenten in Grenzfläche müssen identisch sein

$$k_e \sin \theta_e = k_t \sin \theta_t$$

$$k_e \cdot \frac{c}{n_e} = k_t \frac{c}{n_t} = \omega$$

$$\frac{\omega n_e}{c} \cdot \sin \theta_e = \frac{\omega n_t}{c} \cdot \sin \theta_t$$

$n_e \sin \theta_e = n_t \sin \theta_t$  Brechungsgesetz

## Fresnelsche Formeln

D.h. Betrachtung der Maximalamplituden  $E_{1oe}^{\vec{}}$ ,  $E_{or}^{\vec{}}$  und  $E_{ot}^{\vec{}}$   $\Rightarrow$  Reflexions- und Transmissionsgrad einer Grenzfläche Wiederholung: "Strahlintensität"  $\rightarrow$  Poyting-Vektor  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$   
 Richtung von S: Die des Energieitransports = Strahlrichtung Betrag von S:  $|\vec{S}| = \frac{c_0}{n} \cdot$

$$\epsilon \epsilon_0 E^2 = \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0}{\mu_0}} \underbrace{E^2(t)}$$

oszilliert mit Lichtfrequenz

$\rightarrow$  zeitliche Mittelung über eine Periode T

$$\langle S \rangle_T = \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \frac{1}{2} \rightarrow \text{Energiestromdichte } \frac{W}{m^2}$$

I. Voraussetzungen für die Intensitätsbetrachtung

- Grenzfläche ist keine Energiesenke  $\Rightarrow$  Energiestrom ist stetig Es muss gelten:  $S_e A \cos \alpha - S_r A \cos \alpha = S_t A \cos \beta$   
 $n_e E_e^2 \cos \alpha - n_e E_r^2 \cos \alpha = n_t E_t^2 \cos \beta$

$$n_e \cos \alpha \cdot (E_e^2 - E_r^2) = n_t \cos \beta E_t^2 \quad (3)$$

- keine Ladung, kein Strom ( $\rho = 0; j = 0$ )  
 $\Rightarrow$  Tangentialkomponenten sind stetig!
- keine Absorption:  $n$  ist reell,  $n = \sqrt{\epsilon}$

II. Allgemeiner Fall (beliebige Einfallrichtung)

Wir zerlegen  $\vec{E}$  in  $E^s$  und  $E^p$

- $E^s$  ist stetig (da Tangentialkomponente)

$$E_e^s + E_r^s = E_t^s \quad (4)$$

Geometrieargument muss gelten:

$$n_e \cos \alpha \cdot ((E_e^r)^2 - (E_r^r)^2) = n_t \cos \beta \cdot (E_t^s)^2$$

$$1:2 \quad n_e \cos \alpha \cdot (E_e^r - E_r^r) = n_t \cos \beta \cdot E_t^s$$

$$= n_t \cos \beta \cdot (E_e^s + E_r^s)$$

$$E_e^s (n_e \cos \alpha - n_t \cos \beta) = E_r^s (n_t \cos \beta + n_e \cos \alpha) \quad \overrightarrow{\text{Snellius}}$$

$$E_r^s = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot E_e^s = r^s \cdot E_e^s$$

$$r^s = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (\text{Amplituden-})\text{Reflexionskoeffizient Analog für } E_t^s$$

$$E_t^s = \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot E_e^s = t^s E_e^s$$

$t^s$  ist Transmissionskoeffizient

- Komponente in Einfallsebene  $E^p$  Tangentialkomponente ( $E^p \cdot \cos \alpha$ ) muss stetig sein.  
 $(E_e^p - E_r^p) \cdot \alpha = E_t^p \cdot \cos \beta$

Spiegelung!

$$E_r^p = E_e^p \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)} = r^p E_e^p \text{ Analog für } E_t^p:$$

$$E_t^p = \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)} \cdot E_e^p = t^p E_e^p \quad (5)$$

III. Spezieller Fall: senkrechter Einfall ( $\alpha = \beta = 0$ ) aus II. 1.) 2.) für  $\alpha = \beta = 0$   $\left( \begin{array}{l} n_e(E_e^2 - E_r^2) = n_t E_t^2 \\ E_e + E_r = E_t (\text{Tangenten}) \end{array} \right.$

$$\vec{E}_r = \frac{n_e - n_t}{n_e + n_t} \cdot \vec{E}_e \equiv r \vec{E}_e$$

$$\vec{E}_t = \frac{2n_e}{n_e + n_t} \cdot \vec{E}_e \equiv t \vec{E}_e$$

Phasensprung bei Reflexion

$$r = \frac{n_e - n_t}{n_e + n_t}; \vec{E}_r = r \vec{E}_e$$

$$\vec{E}_e = \vec{E}_0 \cdot \cos \vec{k} \vec{r} - \omega t$$

$$\text{z.B. bei } t=0: \vec{E}_e = \vec{E}_0 \cdot \cos \vec{k} \vec{r}$$

$n_e > n_t \Rightarrow r > 0; \vec{E}_r = |r| \vec{E}_e \rightarrow$  Amplitude niedriger, gleiche Richtung des Feldvektors

$n_e < n_t \Rightarrow r < 0; \vec{E}_r = -|r| \vec{E}_e \rightarrow$  Amplitude niedriger, entgegengesetzte Richtung des Feldvektor  $\Rightarrow$  Phasensprung um  $\pi$

**Intensitäten bei Reflexion (senkrechter Einfall)**  $I \propto S = \frac{C_0}{n} \epsilon \epsilon_0 E^2 = \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0}{\mu_0}} E^2$

$I_r = R I_e$  Reflexionsgrad/-vermögen

$I_t = T I_e$  Transmissionsgrad/-vermögen

$$R = \frac{I_r}{I_e} = \frac{n_e E_r^2}{n_e E_e^2} = \frac{(r E_e)^2}{E_e^2} = r^2 = \left( \frac{n_e - n_t}{n_e + n_t} \right)^2$$

$$T = \frac{I_t}{I_e} = \frac{n_t E_t^2}{n_e E_e^2} = \frac{n_t t^2}{n_e} \neq t^2$$

Beispiel: Übergang Glas/Luft ( $n_{Glas} = 1,5$ )

$$I_r = \frac{1}{25} I_e = 4\% I_e \text{ (unabhängig von Richtung)}$$

$\rightarrow$  Winkelabhängigkeit von  $r^s$  &  $r^p$  hat wichtige Konsequenz!

IV. Kurz: Verallgemeinerung für absorbierende Medien d.h komplexe Brechzahl  $n = n_R + i n_I$

Spez.: Übergang zu Vakuum, senkrechter Einfall

$$r = \frac{n-1}{n+1} \Rightarrow R = r^* r = \frac{(n_R-1)^2 + n_I^2}{(n_R+1)^2 + n_I^2}$$

## 2 Geometrische Optik

Lichtwellenlänge ist klein gegenüber den Abmessungen der optischen Hindernisse, Öffnungen  $\rightarrow$  Beugung ist vernachlässigbar

### Grundgesetze

- Geradlinige Ausbreitung des Lichts
- Unabhängigkeit der Lichtstrahlen  $\rightarrow$  Lichtstrahlen stören sich nicht  $\rightarrow$  Beispiel: Lochkamera

- Umkehrbarkeit des Lichtwegs
- Reflexionsgesetz
- Brechungsgesetz

## Ebene Spiegel (Planspiegel)

## Sphärischer Spiegel

### Hohlspiegel (Konkavspiegel)

Ausgezeichnete Strahlen:

1. Der achsparallele Strahl verläuft nach der Reflexion durch den Brennpunkt F.
2. Der Brennpunktstrahl verläuft durch den Brennpunkt F und wird achsparallel reflektiert.
3. Der radiale Strahl verläuft durch C und wird in sich selbst reflektiert.
4. Der zentrale Strahl verläuft durch S und wird unter gleichem Winkel zur Achse reflektiert.

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \Rightarrow \text{Abbildungsgleichung } \frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

## Dünne Linse

- dünne Linse mit Brechzahl n
- Umgebung: Luft/Vakuum  $n \approx 1$
- Brechung an zwei Oberflächen

$$\text{Erste Oberfläche: } \frac{1}{g} + \frac{n}{b_1} = \frac{n-1}{r_1}$$

$\Rightarrow$  virtuelles Bild bei  $P'_1$  ( $b_1$  ist negativ)

Zweite Oberfläche:

$$-\frac{n}{b_1} + \frac{1}{b} = \frac{1-n}{r_2}$$

$\Rightarrow$  Endbild bei P' ( $r_2$  ist negativ!)

$$\text{Addition beider Gleichungen: } \frac{1}{g} + \frac{1}{b} = (n-1) \cdot \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$g \rightarrow \text{inf} \Rightarrow b = \text{Brennweite } f \text{ der Linse}$

$$\left\| \frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \right\| \text{ Bezeichnung: Brechkraft, Brechwert}$$

reziproke Brennweite  $\frac{1}{f}$

$$\text{Einheit: Dioptrie } 1 \text{dpt} = 1 \frac{1}{\text{m}}$$

$$\rightarrow \left\| \frac{1}{b} + \frac{1}{g} = \frac{1}{f} \right\| \text{ Linsengleichung oder Laplacesche Abbildungsgleichung}$$

### Bildkonstruktion für dünne Linsen

## Dicke Linsen

Folie

Sammellinse skizze	Zerstreuungslinse skizze
.	Abbildungsmaßstab $V = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}$

## Linsensysteme (Mehrere Linsen)

Folie

Gaußsche Brennweite eines Linsensystems: Folie

## Abbildungsfehler

### Sphärische Aberration

→ achsferne Strahlen werden nicht im Brennpunkt fokussiert.

Abhilfe:

- Ausblendung achsferner Strahlen
- Linsenkombinationen
- parabolische Form bei Spiegeln (Formkorrektur)

### Chromatische Aberration

→ Farbfehler (nur bei Linsen)

Einfluss der Dispersion

→ für jede Frequenz andere Brechzahl Abhilfe:

- Linsenkombinationen mit unterschiedlichen Brechzahlen (Dispersionen)

### Astigmatismus

schiefer Lichtbündel (Koma)

Verzerrung des Bildes bei großen Winkeln zur optischen Achse

## 3 Optische Instrumente

### Kenndaten eines Objektivs

- Brennweite bzw. Brechkraft  $D = \frac{1}{f}$
- Öffnung (relative Öffnung)  $\ddot{o} = \frac{d}{f}$  z.B.  $\frac{d}{f} = 1 : 2,8 \rightarrow$  Abbildungsfehler: möglichst klein  $\rightarrow$  Lichtstrom:  $\propto \left(\frac{d}{f}\right)^2$  Blendenmarkierungen sind so gewählt, dass sich der Lichtstrom bei jedem Schritt verdoppelt:  $\frac{f}{d} = 22; 16; 11; 8; 5,6; 4; 2,8; 2; 1,4; 1 \rightarrow$  Schärfentiefe Folie

## Das Auge

Folien

## Die Lupe

Folie

## Die Photokamera

Folie

## Der Projektor

Folie

## Das Mikroskop

Folie

## Teleskop

Folie

# Teil III

# Wellenoptik

## 4 Interferenz und Beugung

### Interferenz

III. Optische Vergütung

a) Reflexminderung (Entspiegeln)

z.B. bei Objekten aus mehreren Linsen

Schicht mit Brechzahl  $n_s$

$$n_{Luft} < n_s < n_{Glas}$$

$$\text{Normaler Einfall } \Delta z = 2dn_s = \frac{\lambda}{2}$$

(destruktiv)

⇒ Reflexionsminderung für Licht mit Wellenlänge  $\lambda$  (unvollständige Reflexionsminderung)

⇒ mehrere Schichten übereinander

b) Reflexionserhöhung

z.B. bei Spiegel

Schicht mit Brechzahl  $n_s > n_{Glas}$

Normaler Einfall  $\Delta z = 2dn_s + \frac{\lambda}{2} = \lambda$  (Phasensprung erzeugt das  $+\frac{\lambda}{2}$ )

## Interferometer

Optische Geräte, mit denen man durch Lichtinterferenzen kleine Abstände, Brechzahlunterschiede, Winkel etc. sehr genau messen kann.

### Michelson-Interferometer (1880) (Folie)

Gangunterschied:  $HS - S_2$  zu  $HS - S_1$

$(2m + 1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow$  dunkel

Verschiebung von  $S_2$  um  $\Delta x = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow$  Änderung von hell  $\leftrightarrow$  dunkel

Entweder:

1. Weg  $\Delta x$  bekannt  $\rightarrow \lambda$  bestimmen
2.  $\lambda$  bekannt  $\rightarrow$  Weg messen (genauer als  $\lambda$ )

Küvette in einem der beiden Strahlengänge  $\rightarrow$  Brechzahl von Luft:

1. evakuieren
2. langsam Luft einlassen
3. Zählen der Hell-Dunkel-Wechsel bis 1 bar messen.

### Mach-Zehnder-Interferometer (Folie)

### Fabry-Perot-Interferometer (Folien)

## Interferenz am Doppelspalt

(Skizzen Doppelspalt!)

$l \gg d \rightarrow$  Teilstrahlen parallel

Maxima:  $d \cdot \sin \theta = m\lambda$

Minima:  $d \cdot \sin \theta = (2m + 1)\frac{\lambda}{2}$

Abstand des m-ten Maximums von der optischen Achse:  $y_m = l \cdot \tan \theta \approx l \sin \theta$  (da  $\theta$  klein)

$\Rightarrow y_m = m \frac{\lambda \cdot l}{d}$

Abstand benachbarter Streifen:  $\Delta y = \frac{\lambda \cdot l}{d} \Rightarrow$  äquidistant!

Intensitätsverteilung auf Schirm: (Skizze gleiche Intensitäten bei Maxima)

Hier Annahme: Einzelintensitäten der beiden Strahlen ist unabhängig von  $\theta$ ! (Young)

Zweistrahlinterferenzen (Folie)

## Vektoraddition von harmonischen Wellen

- Wellen gleicher Frequenz aber unterschiedlicher Phase  $\rightarrow$  einfaches Verfahren basierend auf geometrischer Interpretation  $\rightarrow$  Zeigerdiagramm

Zwei Wellen:  $E_1 = A_1 \sin \alpha$ ;  $\alpha = \omega t - kz$

$$E_2 = A_2 \sin \alpha + \delta$$

$$E_1 + E_2 = A_1 \sin \alpha + A_2 \sin \alpha + \delta$$

(Skizze) Vektor in xy-Ebene mit Länge  $A_1$  im Winkel  $\alpha$  zur x-Achse  $\Rightarrow$  y-Komponente  $= E_1$

Vektor rotiert als Funktion der Zeit mit Frequenz  $\omega \rightarrow$  Zeiger/Phasor

Summenvektor  $A' \cdot \sin \alpha + \delta' = A_1 \sin \alpha + A_2 \sin \alpha + \delta$

speziell: gleiche Amplitude  $A_1 = A_2$

$$\delta = 2\delta' \Rightarrow \delta' = \frac{\delta}{2}$$

$$\cos \delta' = \frac{A'}{A_0} \Rightarrow A' = 2A_0 \cdot \cos \frac{\delta}{2}$$

$\Rightarrow$  Resultierende Welle:

$$A' \sin \alpha + \delta' = 2A_0 \cos \frac{\delta}{2} \cdot \sin \alpha + \frac{\delta}{2}$$

## Interferenzmuster bei drei oder mehr äquidistanten Quellen

$\rightarrow$  Interferenzmuster ähnlich zu dem des Doppelspaltes

- Maxima an gleichen Positionen, unabhängig von Zahl der Quellen
- Schärfe nimmt mit Anzahl der Quellen zu

(Skizze) Gangunterschied benachbarter Strahlen:  $d \cdot \sin \theta$

Phase von Strahl 1 bei P:  $\alpha = \omega t$

$$E_1 = A_0 \sin \alpha$$

$$E_2 = A_0 \sin \alpha + \delta$$

$$E_3 = A_0 \sin \alpha + 2\delta$$

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot d \sin \theta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{yd}{l} \quad (\text{Skizze})$$

## Beugung

"Abbiegung" von Wellen an den Rändern von Hindernissen  $\rightarrow$  Wellen treten in Geometrischen Schattenbereich ein.

Ebene Wellen  $\rightarrow$  Fraunhofer-Beugung

Kugelwellen  $\rightarrow$  Fresnel-Beugung

## Beugung am Einzelspalt

**Voraussetzung:**  $a \approx \lambda$  a: Spaltbreite

(Skizze)

Bisher: Annahme, dass Intensitäten der Welle, die von einem Spalt ausgeht, winkelunabhängig ist.  $\rightarrow$  gilt nicht, wenn Spalt endliche Breite hat!

$\rightarrow$  Hauptmaximum bei  $\theta = 0$

$\rightarrow$  viele Nebenmaxima

→ dazwischen Nullstellen

$$\text{Erste Nullstelle: } \sin \theta = \frac{\lambda}{2a} \Rightarrow a \cdot \sin \theta = \lambda$$

(Skizze Nullstelle) Auslöschung von 1 und 42. Elementarwelle, 2. und 43., 3. und 44. ...

zweite Nullstelle: Spalt in Viertel aufteilen (analoge Betrachtung)

$$\Rightarrow a \cdot \sin \theta = 2\lambda$$

Allgemeiner Ausdruck für Nullstellen:

$a \cdot \sin \theta = m\lambda$ ;  $m=1,2,3,\dots$   $m$  ist Ordnung der Nullstelle Lager der Nullstellen auf dem Schirm:

$l$ : Abstand des Schirms

$y$ : Position auf dem Schirm

$$\tan \theta = \frac{y}{l}; \sin \theta = \frac{\lambda}{a}$$

$\theta$  ist klein  $\Rightarrow \sin \theta \approx \tan \theta$

$y_{min} = \frac{lm\lambda}{a}$  m. Nullstelle (Folien Intensitätsverteilung mit Zeigerdiagramm)

Intensitätenverhältnis bezogen auf  $A_{max}$

$$\frac{A^2}{A_{max}^2} = \frac{(\sin(\frac{\phi}{2}))^2}{\frac{\phi^2}{2}}$$

$$I = I_0 \left( \frac{\sin(\frac{\phi}{2})}{\frac{\phi}{2}} \right)^2$$

Intensitätsverteilung für Beugungsmuster am Einzelspalt

Phasenunterschied zwischen oberster und unterster Teilwelle  $\Phi = N \cdot \delta$

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta; d = \frac{a}{N}$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{2\pi}{\lambda} a \cdot \sin \theta$$

$a$ : Spaltbreite;  $d$ =Abstand Einzelwellen

1. Nullstelle:

$$a \cdot \sin \theta = \lambda$$

2. Nullstelle:

$$a \cdot \sin \theta = 2\lambda$$

Minima

Maxima höherer Ordnung:

$$\sin \theta = (2m + 1) \frac{\lambda}{2a}$$

Maximum 1. Ordnung:

$$a \cdot \sin \theta = \frac{3}{2}\lambda$$

Maximum 2. Ordnung:

$$a \cdot \sin \theta = \frac{5}{2}\lambda$$

(Skizze Intensitätsverteilung  $I$  nach  $\sin \theta$ )

## Doppelspalt

Bei zwei (oder mehr) Spalten ist das Beugungsmuster Kombination von:

- Einzelspaltbeugung

$$I'_0 = I_0 \left( \frac{\sin(\frac{\phi}{2})}{\frac{\phi}{2}} \right)^2$$

- Doppelspaltinterferenz

$$I = 4I'_0 \cdot \cos^2 \frac{\delta}{2}$$

⇒ Interferenzbild mit Einzelspalt-Beugungsmuster moduliert

$$I = 4I_0 \cdot \left( \frac{\sin \frac{\phi}{2}}{\frac{\phi}{2}} \right)^2 \cos^2 \frac{\delta}{2} \rightarrow \phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \sin \theta \cdot a = f(\text{Spaltbreite}) \quad (6)$$

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \sin \theta \cdot d = f(\text{Spaltabstand}) \quad (7)$$

$$(8)$$

$I_0$  = Intensität eines Strahls bei  $\theta = 0^\circ$   
(Folie Doppelspalt/Einzelspalt, Gitter/Einzelspalt)

## Beugung am Gitter

Beugungsgitter: ebene Oberfläche (z.B. Glas) in die eine große Anzahl von Linien eingritz ist.

Kennzeichnende Größen:

g: Abstand der Spalte

a: Spaltbreite

N: Anzahl der Linien(paare) z.B.  $10000 \frac{1}{cm}$

g und a in Größenordnung der Wellenlänge

(Skizze Gitter, Schrägeinfall vor Gitter) (Folie Experiment)

$$\Delta s = \Delta s_1 - \Delta s_2 \quad (9)$$

$$g \cdot \sin \theta - g \cdot \sin \theta_0 \quad (10)$$

$$(11)$$

Hauptmaxima (maximale Verstärkung):

$$g \cdot (\sin \theta - \sin \theta_0) = m \cdot \lambda; m \in Z$$

Interferenzmuster für N Striche:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot g(\sin \theta - \sin \theta_0)$$

allgemein:

$$\cos \delta = \text{Re}[e^{i\delta}]; \begin{cases} E = A_0 \cdot \cos \delta \\ = \text{Re}[A_0 \cdot e^{i\delta}] \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
E_1 &= \operatorname{Re}[A_0 \cdot e^{i\alpha}] \\
E_2 &= \operatorname{Re}[A_0 \cdot e^{i(\alpha-\delta)}] \\
E_3 &= \operatorname{Re}[A_0 \cdot e^{i(\alpha-2\delta)}] \\
E_N &= \operatorname{Re}[A_0 \cdot e^{i(\alpha-(N-1)\delta)}] \\
\alpha &= \omega t - kz
\end{aligned}$$

$$E = \sum_{j=1}^N E_j = \operatorname{Re}[A_0 \cdot e^{i\alpha} \underbrace{(1 + e^{-i\delta} + e^{-2i\delta} + \dots + e^{-(N-1)i\delta})}_{\frac{1-e^{-iN\delta}}{1-e^{-i\delta}} \text{ (geometrische Reihe)}}]$$

$$E = \operatorname{Re}[A_0 e^{i\alpha} \frac{1-e^{-iN\delta}}{1-e^{-i\delta}}] \tag{12}$$

$$= A_0 \frac{\sin(N\frac{\delta}{2})}{\sin(\frac{\delta}{2})} \cos(\alpha - \frac{(N-1)\delta}{2}) \tag{13}$$

Intensität, zeitlicher Mittelwert:

$$I = E^2 = I_0 \frac{\sin^2(N\frac{\delta}{2})}{\sin^2(\frac{\delta}{2})}$$

Grenzfall:  $N = 2 \rightarrow$  Doppelspalt

$$I = I_0 \frac{\sin^2(N\frac{\delta}{2})}{\sin^2(\frac{\delta}{2})} = 4I_0 \cos^2(\frac{\delta}{2})$$

Vorlesung 11.12. fehlt!!!

Verallgemeinerung

- Koordinate auf Schirm (im Abstand  $l$ )

$$x = l \cdot \sin \theta$$

- zwei Dimensionen  $\rightarrow$  Schirm( $x, y$ )  
 $\rightarrow$  Spaltbene( $\xi, \eta$ )
- Elimination der Integrationsgrenzen ( $\xi$ )

$$F(\xi, \eta) = 1 \text{ für } 0 \leq \xi \leq a \text{ und } 0 \leq \eta \leq b$$

$$F(\xi, \eta) = 0 \text{ überall sonst}$$

$\rightarrow$  rechteckiger Spalt

$$E(x, y) = A_0 e^{i\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta) \cdot e^{\frac{2\pi i}{\lambda l} (x\xi + y\eta)} d\xi d\eta$$

→ durch geeignete Wahl von  $F$  sind alle Blendenformen beschreibbar

→ auch örtlich variierendes  $0 < F < 1$  ist möglich

Ausdruck entspricht der Fourier-Transformation

Verteilung der Amplituden in der Schirmebene ( $E(x, y)$ ) ist FT der Verteilung der Amplitude in der Spaltbene.

Diese Transformation ist umkehrbar!

## Holographie

Photographische Platte

→ Aufzeichnung der Intensität

→ Information über Phase geht verloren

⇒ keine räumlichen Bilder

Gaber (1948): Aufnahmeverfahren für Amplitude und Phase ⇒ räumliche Information ⇒ Holographie

(Skizze)

- Objekt mit monochromatischem Licht beleuchten
- gestreutes Licht auf Photoplatte → Objektwelle
- zusätzlich: Teil der einfallenden Welle ungestreut (Spiegel) ebenfalls auf Photoplatte → Referenzwelle

Objektwelle:

$$E_O = A_O e^{i(\omega t + \Phi_O)}$$

Referenzwelle:

$$E_R = A_R e^{i(\omega t + \Phi_R)}$$

$$I(x, y) = |E_O + E_R|^2 = A_R^2 + A_O^2 + \underbrace{2A_R A_O \cos(\Phi_O - \Phi_R)}_{\text{Interferenzterm}}$$

Interferenzterm enthält holographische Information und ist Funktion von  $x$  und  $y$  ( $f(x + y)$ )

Entwicklung der Platte  $I(x, y) \rightarrow T(x, y) = c \cdot I(x, y)$

Auslesen: Transmissionsbild mit Lesewelle  $L(=R)$  beleuchten (gleiche Wellenlänge)

⇒ virtuelles Bild des Objekts am ursprünglichen Ort

⇒ reelles Zwillingsbild symmetrisch zur Filmebene (Spiegelbild)

$$E_L = A_R \cdot e^{i(\omega t + \Phi_R)}$$

$$E_R = E_L \cdot T(x, y) = c \cdot E_L \cdot I(x, y)$$

$$E_B = c \cdot [(A_R^2 + A_O^2) A_R \cdot e^{i(\omega t + \Phi_R)} + A_R^2 \cdot A_O \cdot e^{i(\omega t + \Phi_O)} + A_R^2 \cdot A_O \cdot e^{i(\omega t - \Phi_O + 2\Phi_R)}] = c \cdot [I + II + III]$$

I: durch Photoschicht geschwächte Lesewelle, keine Objektinformation

II: proportional zu Objektwelle ⇒ 3D-Bild vor Platte

III: wie Objektwelle aber negative Phase ⇒ 3D-Bild hinter Platte → reell

## Fresnelsche Beugung

bisher *Fraunhofer-Beugung*

→ Quelle und Schirm in sehr großem Abstand zu Objekt

→ paralleles Licht, ebene Wellen

jetzt: *Fresnel-Beugung*

→ Quelle oder Schirm (oder beides) nahe am Objekt

→ Kugelwellen ⇒ komplizierte Effekte

(Folie)

Qualitative Betrachtung mittels Fresnelscher Zonen

- betrachte Intensität an P
- Objektebene in konzentrische Ringe einteilen, sodass  $r$  jeweils um  $\frac{\lambda}{2}$  zunimmt

$$\begin{aligned} r_1 &= r_0 + \frac{\lambda}{2} \\ r_2 &= r_0 + 2 \cdot \frac{\lambda}{2} \\ &\vdots \\ r_n &= r_0 + n \cdot \frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$

⇒ Fresnelsche Zonen mit Index  $n$

- abwechselnd konstruktive und destruktive Interferenz in P
- einzelnen Zonen haben fast gleiche Fläche

$$\pi \lambda r_0 \left\{ -\frac{\lambda^2}{4} (2n+1) \right\}$$

(Intensität nimmt mit  $n$  leicht ab)

$$\xi = \xi_0 - \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 + \dots$$

Beiträge zu Intensität an P

$$\xi = \frac{1}{2}\xi_0 + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\xi_0 - \xi_1 + \frac{1}{2}\xi_2\right)}_{\approx 0} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\xi_2 - \xi_3 + \frac{1}{2}\xi_4\right)}_{\approx 0} + \dots$$

allgemein:  $\left(\frac{1}{2}\xi_{n-1} - \xi_n + \frac{1}{2}\xi_{n+1}\right) \approx 0$

$$\xi = \frac{1}{2}\xi_0 \tag{14}$$

(Abdecken der inneren Zonen → heller Fleck bei P ⇒ *Poisson-Fleck*)

*Zonenplatte*: Glasplatte, wo jede Zweite Zone geschwärzt wird  
 → konstruktive Interferenz aller offenen Zonen  
 → für bestimmte  $\lambda$  Fokussierung in P  
 $\hat{=}$  Linse  $f \approx \frac{R_1^2}{m \cdot \lambda}$   
 $R_1$  ist Radius des 1. Schreibchens (Zone)  
 m ist die Ordnung

## Teil IV

# Hinweise auf die Quantenstruktur der Natur

Phänomene auf atomaren Dimensionen

Atomradius  $\approx 10^{-10} m \hat{=}$  Röntgenstrahlung mit einigen keV

→ neuartige Effekte → Quantenphänomene → Übergang von klassischer Physik zur Quantenphysik (Quantendynamik (QM), Quantenelektrodynamik (QED))

1. Teilchennatur des Lichts (elektromagnetische Strahlung)
2. Wellencharakter von "Teilchen"
3. Unschärferelation
4. Schrödingergleichung

## 5 Photonen

bisher: Licht als Welle

aber: viele Experimente lassen sich durch Welleneigenschaften nicht erklären.

→ doch Teilchen?

⇒ Photon: Energie

$$E = h\nu = h \frac{c}{\lambda} \quad (15)$$

Geschwindigkeit  $v = c$  (Lichtgeschwindigkeit)

Ruhemasse  $m_0 = 0$

Impuls  $p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$

Eigendrehimpuls (Spin)  $S = \hbar = \frac{h}{2\pi}$  Plancksches Wirkungsquantum  $h = 6,626 \dots \cdot 10^{-34} J_s$

Umrechnung  $E[eV] = \frac{12398}{\lambda[\text{nm}]}$

# Strahlungsgesetze

## Definition und Einführung

Jeder Körper mit  $T > 0$  emittiert Strahlung, deren Wellenlänge von  $T$  abhängt. → Temperatur- oder Wärmestrahlung

z.B. glühende Körper (1000 K → rot, 3000K → weiß)

Allgemein: Körper im thermischen Gleichgewicht mit Umgebung → pro Zeiteinheit wird gleich viel Energie abgestrahlt wie absorbiert.

→ guter Absorber = guter Emittierer

Absorptionsgrad  $\epsilon(\nu)$  ist 1 - Reflexionsgrad

$$r(\nu) = 1 - \epsilon(\nu)$$

Perfekter Absorber:  $\epsilon = 1$ ; absorbiert unabhängig von Frequenz alle einfallende Strahlung  
⇒ *Schwarzer Körper (Schwarzer Strahler)*

Experimentelle Realisierung des Schwarzen Strahlers: *Hohlraumstrahler*  
(Skizze)

- Hohlraum, dessen Wände auf konstanten  $T$  sind  
⇒ Strahlung in thermischen Gleichgewicht mit Hohlraumwänden  
→ kleines Loch (Gleichgewicht nicht beeinflusst)  
Energiedichte wird durch Messung der Strahlungsleistung  $L(\nu, T)$  bestimmt.
- spektrale Energiedichte  $u(\nu, T)d\nu = \frac{\text{Strahlungsenergie in } [\nu, \nu+d\nu]}{\text{Volumen des Hohlraums}}$
- spektrale Strahlungsflussdichte  $L(\nu, T)d\nu = \frac{\text{Strahlungsleistung } P \text{ in } [\nu, \nu+d\nu]}{\text{Raumwinkel} \times \text{Fläche des Strahlers}}$
- abgestrahlte Leistung [W]

$$P(\nu, T)d\nu = u(\nu, T) \cdot d\nu \cdot c \cdot A \cdot \frac{\Delta\Omega}{4\pi}$$

$$\Rightarrow L(\nu, T) = \frac{c}{4\pi} \cdot u(\nu, T)$$

(Skizze  $L(\lambda)$ )

- Spektrum ist kontinuierlich
- ausgeprägtes Maximum →  $\lambda_{max}$
- Spektrum ist unabhängig von der Form des Hohlraums
- Integral wächst stark mit  $T$  ( $M(T)$ )

## Ältere Strahlungsgesetze

Integration von  $L_{ges}(T)$  über ganzen Frequenzbereich

$$\Rightarrow M(T) = \int_0^\infty d\nu L_{ges}(\nu, T) = \underbrace{\sigma}_{\text{universelle Konstante}} \cdot T^4$$

(Stefan-Boltzmann-Gesetz)

$$\sigma = 5,67033 \cdot 10^{-8} \text{Wm}^{-2} \text{K}^{-4}$$

Wiensches Verschiebungsgesetz

$$\lambda_{max} \cdot T = 0,29 \text{cm} \cdot \text{K}$$

Beispiel Sonne:  $T = 6000 \text{K}$

$$\Rightarrow \lambda_{max} = 480 \text{nm}$$

Rayleigh-Jeans-Gesetz:

$$u(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT \cdot d\nu$$

- gute Beschreibung für kleine  $\nu$
- divergent für große Frequenzen  
→ Ultraviolett Katastrophe!

Wiensches Strahlungsgesetz

Näherung für hohe Frequenzen:

$$u(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi\nu^3}{c^3} e^{-\frac{h\nu}{kT}} d\nu$$

→ versagt bei kleinen Frequenzen

**Plancksches Strahlungsgesetz**

$$u(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu$$

1. Atome in Wänden sind kleine e.-m. Oszillatoren mit charakteristischer Frequenz  $\nu$ 
  - strahlen und absorbieren e.-m.. Strahlung
  - Gleichgewicht zwischen Hohlraum und Strahlung
  - Anregung der Oszillatoren ist Funktion von  $T$
2. Oszillatoren können nur diskrete Energiewerte annehmen  
 $E_n = n \cdot h\nu \quad n \in \mathbb{N}$

**Ableitung nach Einstein**

Annahmen:

- Licht besteht aus Teilchen → Photonen
- Lichtwelle besteht aus bestimmter Zahl von Photonen
- Existenz diskreter Atomenergieniveaus

System mit zwei Energieniveaus mit  $E_1 < E_2$

Annahme: 3 verschiedene Strahlungsübergänge mit  $\Delta E = E_2 - E_1 = h\nu$

Absorption: (Skizze: 2 Energieniveaus  $E_1, E_2$ , Pfeil von  $E_1$  nach  $E_2$  mit einfallendem Licht  $h\nu$ , B12)

$\Delta E = h\nu$  wird Lichtfeld entzogen.

Koeffizient  $B_{12}$  beschreibt Wahrscheinlichkeit für diesen Übergang

Spontane Emission:

(Skizze: 2 Energieniveaus, Pfeil von  $E_2$  nach  $E_1$ , A21, Photon wird emittiert)

$h\nu$  wird dem Strahlungsfeld abgegeben.

Wahrscheinlichkeit ist  $A_{21}$

Emission erfolgt spontan mit charakteristischer Zeitkonstante, die als natürliche Lebensdauer bezeichnet wird.

Stimulierte Emission:

(Skizze: 2 Energieniveaus, Pfeil von  $E_2$  nach  $E_1$ , B21, Photon kommt rein, 2 Photonen werden emittiert)

Strahlungsfeld induziert den Übergang, frei werdende Energie wird dem Strahlungsfeld zugeführt

Wahrscheinlichkeit  $B_{21}$

Ratengleichung des System für alle drei Prozesse: System aus  $N$  Atomen,  $N = N_1 + N_2$

$N_1$  ist Anzahl der Atome im Zustand  $E_1$

$N_2$  ist Anzahl der Atome im Zustand  $E_2$

System ist im Gleichgewicht mit Strahlungsfeld mit Energiedichte  $u(\nu, T)$

Abnahme der Besetzung von  $E_1$

$$dN_1 = -B_{12}N_1u(\nu, T)dt$$

Abnahme der Besetzung von  $E_2$

$$dN_2 = -A_{21}N_2dt - B_{21}N_2u(\nu, T)dt$$

Gleichgewicht:  $dN_1 = dN_2$

$$B_{12}N_1u(\nu, T) = A_{21}N_2 + B_{21}N_2u(\nu, T)$$

Statistische Mechanik  $\rightarrow$  Boltzmann-Verteilung

$$\Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{\Delta E}{kT}} \quad k \text{ ist Boltzmann-Konstante}$$

$$(B_{12}e^{\frac{h\nu}{kT}} - B_{21})u(\nu, T) = A_{21}$$

$\rightarrow$  Bestimmung der Koeffizienten: Aus Grenzbedingung  $T \rightarrow \infty \Rightarrow u(\nu, T) \rightarrow \infty$

$\Rightarrow B_{21} = B_{12}$

$$U(\nu, T) = \frac{A_{21}}{B_{12}} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

Es bleibt  $\frac{A_{21}}{B_{12}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}$  aus statistischer Betrachtungen (oder dem Vergleich mit Rayleigh-Jeans)

$A_{21}, B_{12}$  und  $B_{21}$  heißen Einsteinkoeffizienten (wichtig für Verständnis des Lasers)

## Photoeffekt

Zur Veranschaulichung der Quantennatur besser geeignet als schwarzer Strahler

Experiment: Quecksilberlampe beleuchtet geladene Platte: Ladung nimmt ab  
 Glimmerplättchen wird dazwischen gehalten: Ladung nimmt nicht ab  
 Abnahme der Ladung hängt also nicht von Intensität, sondern von Frequenz ab

Auslösung von Elektronen aus Atomen, Molekülen und Festkörpern durch Licht (e.-m. Strahlung)

(Skizze Versuchsaufbau: Elektrode, Spannungsquelle, Strommesser, Kollektor, Photonen auf Elektrode, Pfeil e- von Elektrode zu Kollektor)

- Licht fällt auf Elektrode
- löst dort unter bestimmten Bedingungen Elektronen aus
- Elektronen werden von Kollektor aufgefangen  $\Rightarrow$  Strom  $I$
- Retardierungsspannung (Kollektor ist negativ gegenüber Elektrode)  $\rightarrow$  nur Elektronen mit  $E_{kin} \geq eU$  erreichen den Kollektor  $\Rightarrow E_{kin}$

(Diagramm I nach  $\nu$ , Grenzfrequenz  $\rightarrow$  Sättigungskurve)

Strom setzt erst bei bestimmter materialspezifischer Grenzfrequenz  $\nu$  ein.

(Diagramm I nach  $U$ ,  $U_{max}$  im negativen, etwa linearer Anstieg bis  $U=0$ , dann Sättigung an eine bestimmte Stromstärke mit P1, zweiter Graph, stärkerer Anstieg im negativen, Sättigung an höheren Wert P2)

Wenn Retardierungsspannung größer als  $U_{max}$ , dann kein Strom mehr. Es gilt:  $eU_{max} = \frac{1}{2}mv_{max}^2$

$v_{max}$  ist maximale Geschwindigkeit der ausgelösten Elektronen

$U_{max}$  hängt nicht von Strahlungsintensität ab.  $\rightarrow$  ist klassisch nicht zu verstehen

Elektronen werden nur ausgelöst, für  $\nu \geq \nu_G \leftrightarrow h\nu \geq h\nu_G = W_A$

- Teil der Photonenenergie wird verwendet, um die Elektronen aus Oberfläche zu "befreien"  $\rightarrow$  Austrittsarbeit  $W_A$  (materialspezifisch)
- Rest als kinetische Energie, aber gesamte Photonenenergie wird abgegeben.

$$h\nu - \underbrace{eU_A}_{\text{Austrittsarbeit}} = E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$$

$$U_{max} = \frac{h}{e}\nu - U_A$$

$U_{max}$  als Funktion von  $\nu$  messen:

(Diagramm U nach  $\nu$ , gerade durch Grenzfrequenz, bis dort achsenparallel, extrapoliert bis y-Achse, Achsenabschnitt:  $eU_A$ , Steigung  $h$ )

aus Achsenabschnitt:  $U_A$

aus Steigung: Proportionalitätsfaktor zwischen  $E$  und  $\nu \Rightarrow$  Plancksches Wirkungsquantum  $h$

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{Js} = 4,1357 \cdot 10^e \text{Vs}$$

typische Austrittsarbeiten:  $Li : 2,5 \text{eV}$ ,  $Ni : 5,3 \text{eV}$

**Photoelektronenspektroskopie** Messung der Verteilung  $I(E_{kin}) \Rightarrow$  besetzte Zustandsdichte

Kanal-Elektronenvervielfacher (Photomultiplier) (Skizze) einzelnes Photon  $\Rightarrow$  messbarer Strompuls

## Compton-Effekt

- Streuung von Photonen an Elektronen (skizze)
- Vergrößerung der Wellenlänge  $\lambda' > \lambda$
- $\lambda'$  ist umso größer, je größer der Streuwinkel  $\theta$  ist.
- Für Rückwärtsstreuung  $\Delta\lambda = 0,0485$  unabhängig von  $\lambda$

hohe Energien  $\rightarrow$  relativistische Betrachtung

Energie eines Teilchens  $E^2 = p^2c^2 + (m_0c^2)^2$   $\left\{ \begin{array}{l} m_0 \text{ ist Ruhemasse} \\ p \text{ ist Impuls} \end{array} \right.$

Impuls eines Teilchens ( $m_0 = 0$ )  $p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c}$

...

$$\Rightarrow \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos \theta)$$

$$E_{\gamma'} = h\nu' = \frac{E_\gamma \cdot m_0c^2}{m_0c^2 + E_\gamma(1 - \cos \theta)}$$

$$\left\| \frac{h}{m_0c} = \lambda_c = 2,4263 \cdot 10^{-12} \text{m} \right\| \quad \text{Compton-Wellenlänge}$$

### Bemerkungen

- Comptonstreuung ist schwach bei stark gebundenen Elektronen
- in best. Energiebereich wichtigster Streuprozess/Abschwächungsprozess
- Photon trägt Impuls

## Paarbildung

Paar aus einem Elektron und einem Positron

Tritt auf, wenn  $h\nu > 2m_0c^2(1020 \text{keV})$

(Diagramm Wirkungsquerschnitt nach Energie, Paarbildung, Compton-Effekt, Photoeffekt)

## Röntgenstrahlung

Bei Beschleunigung (Verzögerung) eines geladenen Teilchens (Elektronen)

→ Abstrahlung elektromagnetischer Energie

→ d.h. Emission von Photonen

Basis für Röntgenröhren und Synchrotronstrahlungsquellen

(Skizze Röntgenröhre)

- $e^-$  werden auf Anode beschleunigt ( $10\text{keV} - 100\text{keV}$ ) →  $E_{kin}^{max}$
- beim Auftreffen auf Anode abgebremst

→ kontinuierliches Bremsstrahlungsspektrum

(Skizze Röntgenspektrum)

$$E_{kin}^{max} = e \cdot U = h\nu_{max} = h \frac{c}{\lambda_{min}}$$

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{eU}$$

zu skizze: kontinuierliches Spektrum

charakteristisches Spektrum (Lage unabhängig von Spannung)

→ scharfe Linien (charakteristisch für Anodenmaterial)

(Diagramm Energieniveaus -> charakteristische Linien)

## 6 Elektronen

### Eigenschaften

- elementare Bausteine der Materie (stabile Teilchen)
- gehört zu den Leptonen, die erste Generation der Elementarteilchen (neben Positron  $e^+$ , Elektron-Neutrino  $\nu_e$  und Elektron-Antineutrino  $\bar{\nu}_e$ )
- Ruhemasse:  $m_0 = 9,1093807 \cdot 10^{-31} \text{kg}$
- Ruheenergie:  $m_0 c^2 = 0,51099906 \text{MeV}$   
Ladung des Elektrons: Elektron trägt Quant der elektrischen Ladung → Elementarladung  $e$
- $e = 1,60217733 \cdot 10^{-19} \text{C}$

Bisher keine freien Teilchen mit Bruchteilen von  $e$  nachgewiesen.

Größe des Elektrons Experimentell keine Größe feststellbar! → punktförmiges, strukturloses Teilchen!

## Freisetzung von Elektronen

### Glühemission

Metalloberfläche auf (hoher) Temperatur  $T$  (z.B. in Elektronenröhren)

(Skizze Oberfläche mit austretenden Elektronen)

Stromdichte  $j = \frac{I}{A} = \text{const} T^2 \cdot \exp\left(\frac{-eU_A}{k_B T}\right)$  (Richardson-Gleichung)

→ Emission nimmt mit  $T$  stark zu!

Für Anwendung wichtig. kleine Austrittsarbeit  $eU_A$  und hohe Schmelztemperatur (z.B. Wolfram)

### Feldemission

(im Festkörper → Schottky-Effekt/Tunneleffekt)

Wenn Feldstärke groß genug ( $E > 10^7 \frac{V}{cm}$ ) ⇒ Elektronen können aus Oberfläche austreten. Felder in dieser Größe ( $\cong 0,1V/\mu m$ ) werden mit spezieller Geometrie erzeugt → Spitzenwirkung → elektronische Überschlüge bevorzugt an Spitzen

(Skizze Kondensator Spitze, Konvexschirm)

(Skizze  $E_{f+}$  austrittsarbeit, rechts energie nach oberfläche  $x -Ex$ )

Feld zieht das Potential nach unten ⇒ Elektronen können durch verbleibenden barriere hindurchtunneln

Fowler-Nordheim-Gleichung

Fowler-Nordheim-Gleichung

$$j = A \cdot E^2 \cdot \exp\left(-B \frac{U_A^{\frac{3}{2}}}{E}\right)$$

$E$  ist Feldstärke,  $eU_A$  ist Austrittsarbeit,  $A$  und  $B$  sind Konstanten

### Photoeffekt

siehe 5

### Sekundärelektronen

(Skizze, Elektron, das Elektron ausschlägt)

Elektron mit hoher kinetischer Energie ( $E_{kin}^{primär}$ ) löst ein oder mehrere Sekundärelektronen aus. (Energieerhaltung muss gelten) → Sekundärelektronenvervielfacher

### Andere Methoden

- Stoßionisation in Gasentladungen
- thermische Ionisation (in Gasen)
- $\beta$ -Zerfall:  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$

## Messung der Elektronenladung

### Faradayzahl aus Elektrolyse

- Bestimmung der Ladung  $Q$ , die notwendig ist, um 1 Mol einer einwertigen Substanz elektrolytisch abzuscheiden.  
 $\rightarrow Q = \underbrace{96485 \text{ As}}_{\text{Faraday-Zahl}}$  (Ladung von  $N_A$  Ionen)  
Avogadrozahl  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \Rightarrow$  Elementarladung:  $e = \frac{Q}{N_A}$

### Millikan-Versuch

- Bewegung geladener Öltröpfchen im Gravitationsfeld und elektr. Feld  $E$  (Plattenkondensator)
- Beobachtung mit Mikroskop

(Skizze Millikan)

$$F_{el} = Q \cdot E = n \cdot e \cdot \frac{U}{d} \quad F_G = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho_{\text{Öl}} \cdot g \quad F_A = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho_{\text{Luft}} \cdot g$$

Gleichgewicht:  $F_A + F_{el} = F_G$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 g (\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{Luft}}) = ne \frac{U}{d}$$

$\rightarrow n$  ist immer ganze Zahl

$\rightarrow$  Bestimmung von  $e$

### Bestimmung über Feinstrukturkonstante

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137}$$

fundamentale Größen der Quantendynamik ( $\epsilon_0, \hbar, c$  bekannt)  $\Rightarrow$  Elementarladung  $e$

### Spezifische Ladung des Elektrons

Bestimmung durch Ablenkung von Elektronen im homogenen Magnetfeld

(Skizze Fadenstrahlrohr mit emittierender Glühwendel) Magnetfeld durch äußere Spule, Anordnung im Vakuum (Gas mit niedrigem Druck)

$$E_{kin} = eU_B = \frac{1}{2}m_0v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eU_B}{m_0}}$$

$$\text{Lorentzkraft } \vec{F}_L = m\vec{a} = e\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\text{Zentralkraft } |\vec{F}_Z| = m_0 \frac{v^2}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{e}{m_e} = \frac{2U_B}{R^2 B^2}$$

$U_B, R, B$  messen  $\Rightarrow \frac{e}{m_e}$

$$\frac{e}{m_0} = 1,7588 \cdot 10^{11} \frac{\text{C}}{\text{kg}}$$

$eV$	$\frac{e}{m}$
0	$1,76 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg}$
$500keV$	$0,88 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg}$
$1MeV$	$0,56 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg}$
$1GeV$	–

Wichtig: auch Messung der *relativistischen Massenänderung* möglich.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

## Eigendrehimpuls & magn. Moment

≡ Spin  $\vec{s}$  genannt (oder deutsch Trudelwucht)

- Spinquantenzahl  $s$   $s = \frac{1}{2}$
- Betrag des Eigendrehimpulses  $|\vec{s}| = \sqrt{s(s+1)} \cdot \hbar$
- z-Komponente  $s_z$  des Spins  $\vec{s}$   $s_z = \pm \frac{1}{2} \hbar$   
 ⇒ Magnetisches Moment:  
 $\vec{\mu} = -g_s \mu_B \frac{\vec{s}}{\hbar}$   
 $\mu_B$ : Bohrsches Magneton:  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_0}$   
 $g_s$ : Spin-g-faktor  
 $\mu_z = g_s \mu_B \frac{s_z}{\hbar}$

# Teil V

## Atome und Ionen

Atom: kleinster, mit chemischen Mitteln isolierbarer Baustein der Materie) (Kern + Elektronenhülle)

### 7 Massen von Atomen

heute (seit 1961) Atomare Masseneinheit  $1u$  (auch  $ME, amu$ ), wird bezogen auf Kohlenstoff

Def:  $1u = \frac{1}{12}$  der Masse des neutralen  $^{12}_6C$ -Atoms

$1u = 1,660565 \cdot 10^{-27} kg \Rightarrow$  relative Atommasse  $A_{rel}$

Def:  $1Mol$  eines Stoffes wiegt  $A_{rel}$  Gramm. ( $1Mol^{12}_6C$  wiegt  $12g$ )

Def:  $N_A$  (Avogadro-Zahl) = Zahl der Atome/Moleküle pro Mol ( $N_A = 6,022045 \cdot 10^{23}$ )

$$m_{Atom} = \frac{A_{rel}}{N_A}$$

## 8 Methoden zur Bestimmung von $N_A$

### Elektrolyse (bekannt!)

### Gas und Boltzmannkonstante

$R$ : allgemeine Gaskonstante [ $J/mol \cdot K$ ]

$k_B$ : Boltzmann-Konstante [ $J/K$ ]

$$k_B = \frac{R}{N_A}$$

$R$  ist aus Zustandsgleichung zu bestimmen,  $k_B$  bekannt (Geschwindigkeitsverteilung im Gas)  $\Rightarrow N_A$

### Röntgenbeugung

$\rightarrow$  Volumen eines Mols ( $V_M$ ) ist  $N_A$ -faches des Atomvolumens

$$V_M = N_A \cdot V_{Atom} = \frac{M}{\rho}$$

NaO KfZ-Gitter

Clx Kfz-Gitter, um  $\frac{a}{2}$  entl. x verschoben

NaCl:  $z = 4$  (Anzahl Atome pro Einheitszelle)

$$M = 58,4g$$

$$a = 5,63$$

$$\rho = 2,16 \frac{g}{cm^3}$$

Bestimmung der Gitterkonstanten  $a$  mittels Röntgenbeugung  $\Rightarrow$  Volumen  $V_{EZ} = a^3$  der Einheitszelle, und Anzahl der Atome pro Einheitszelle

$$N_A = \frac{M_Z}{\rho V_{EZ}}$$

(Folie  $N_A$  bei Silicium)

### Atomgrößen aus Kovolumen

van der Waals-Gleichung für reales Gas:

$$\left( p + \underbrace{\frac{a}{V^2}}_{\text{Binnendruck}} \right) \left( V - \underbrace{b}_{\text{Kovolumen}} \right) = RT$$

Experimentell bestimmbare Größen  $b$

$b = 4 \cdot$  Eigenvolumen der Teilchen

$$b = 4 \cdot \frac{4\pi}{3} r^3 N_A$$

## 9 Abbildung einzelner Atome

Erinnerung: Auflösungsvermögen Licht

$$d = \frac{\lambda}{m \cdot \sin \alpha} \approx \lambda \approx 1$$

⇒ harte Röntgenstrahlung (keine Linsen) Elektronen mit  $E_{kin} \gtrsim 150eV$  (Linsenfehler)

Methoden:

### Feldemissions- und Feldionenmikroskopie

Scharfe Spitze ( $R \approx 20nm$ ) → Anlegen von Hochspannung → Felddunneln  $U \approx 3 - 10kV$   
 (Skizze FEM: links Spitze, rechts Schirm, Spannungsquelle) Spitzen im Metall werden als Intensitätsänderung auf dem Schirm erkennbar FEM: Vakuum, Spitze negativ, Auflösung  $\approx 20$  FIM: Argon (z.B.), Spitze positiv, Auflösung  $\approx 1$  (Folie FIM)

### Elektronenmikroskopie

*REM: Rasterelektronenmikroskop*  $e - 50keV$

→ rasternder Primärstrahl, Strahldurchmesser  $2 - 20nm$  (keine atomare Auflösung)

→ Messung eines Sekundäreffektes (Sek. elektronen, Fluoreszenz, ...)

*TEM: Transmissionselektronenmikroskop*  $100keV - 1MeV$

→ Durchstrahlung einer dünnen Probe

→ atomare Auflösung (entweder direkt oder Beugung)

## 10 Rastersondenverfahren

*STM: Raster-Tunnel-Mikroskop* (Scanning-Tunnel-Mikroskop)

*AFM: Raster-Kraft-Mikroskop* (Atomic Force Mikroskop)

STM	AFM
(Skizze)	(Skizze)
Tunnelstrom $I_t$ bei geringen Abständen	Verbiegung des Cantilevers
1.) Tunnelstrom bei konstanter Höhe ( $U(z)$ konstant) $\Rightarrow I_t(x, y, U_z = const)$	1.) Auslenkung des Cantilevers $f(x, y)$
2.) $U_z$ nachregeln $\Rightarrow I_t = const$ $\Rightarrow U_z(x, y, I_t = const)$	Verbiegung
3.) Tunnelspektroskopie $\Rightarrow$ lokale Zustandsdichte $I_t(U) \Rightarrow N(E_B)$	2-) Schwingender Cantilever, Messung von Amplitude oder Phase $f(x, y)$

# Teil VI

## Wellenmechanik

### 11 foo

#### Inteferenzercheinungen

→ Wellencharakter

(Skizze)

(Folien)

Beugung auch mit Elektronen (seit 1927 nachgewiesen)

Zusammenfassung:

klassische Teilchen: keine Beugungseffekte

(Skizze)

Beobachtung anders

(skizze)

→ Selbstinterferenz eines Elektrons

→ Elektron geht durch beide Spalte gleichzeitig, aber niemals Bruchteile eines Elektrons oder der Elementarladung beobachtet!

→ Welle-Teilchen-Dualismus (beide Aspekte stimmen)

Bestimmung des Teilchenpfades zerstört Interferenz

(Impulsstörung durch Wechselwirkung mit den Photonen)

⇒ Messung beeinflusst Ergebnis! Konsequenz: Teilchen wird interferenzfähige Amplitude zugeschrieben, aus der man Intensitäten berechnen kann.

Intensität → relative Häufigkeit

Wahrscheinlichkeit  $P(x)$ : Grenzwert der Häufigkeit für große Teilchenzahl → Intensität  $I(x)$

$P(x)$  ist Quadrat der interferenzfähigen Wahrscheinlichkeitsamplitude  $\Psi$  (komplexe Größe, keine Messgröße)

$$P(x) = |\Psi(x)|^2$$

Regeln zur Beschreibung von Teilcheninterferenz:

1. Wahrscheinlichkeit  $P(x) = |\Psi(x)|^2$   
Normierung:  $\int_{-\infty}^{+\infty} dx P(x) = 1$

2. Wenn es alternative Pfade gibt, dann ist die Wahrscheinlichkeitsamplitude  $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 \Rightarrow P = |\Psi_1 + \Psi_2|^2$

3. Wenn durch Experiment die Pfade unterscheidbar werden, geht Interferenz verloren  
→  $P = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 = P_1 + P_2$

4. Für mehr als zwei Pfade analog:  $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + \dots + \Psi_N$

## de-Broglie

Beschreibung im Wellenbild: de-Broglie

Formale Beschreibung analog zu E.-M.-Welle

$$\Psi = A \cdot e^{i(kx - \omega t)}$$

Was bedeuten  $\vec{k}$  und  $\omega$ ?  $\rightarrow$  de-Broglie  $E_{kin} = \hbar\omega$

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}$$

$|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{|\vec{p}|} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 E_{kin}}}$  Teilchen wird Wellenlänge zugeordnet: deBroglie-Wellenlänge

langsame Elektronen:  $\lambda[\text{Å}] = \sqrt{\frac{150}{E_{kin}[\text{eV}]}}$

## Experimentelle Bestätigung

Versuch von Davisson und Germer  $\rightarrow$  geordnete Oberfläche eines Einkristalls

LEED: low energy electron diffraction

$\rightarrow$  Standardmethode in Oberflächenphysik

## Wellennatur anderer Teilchen

- Heliumatome
- Neutronen

## 12 Wellenpakete

Problem: klassisches teilchen: ort x genau definiert; ebene Welle aber unendlich ausgeht  
 freies Teilchen:  $P(x) = |\Psi(x)|^2 = |A|^2 |e^{i(kx - \omega t)}|^2 = |A|^2$  räumlich konstant  $\Rightarrow$  endlicher wellenzug zur Lokalisierung eines Teilchens! Einfachster Fall: 2 Wellenzüge ähnlicher Frequenz ( $\omega_1; \omega_2; k_1; k_2$ )

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \Psi_1(x, t) + \Psi_2(x, t) = e^{i(k_1 x - \omega_1 t)} + e^{i(k_2 x - \omega_2 t)} \\ &= e^{\frac{i}{2}[(k_1 + k_2)x - (\omega_1 + \omega_2)t]} \cdot 2 \cos \frac{1}{2}(\Delta k x - \Delta \omega t) \end{aligned}$$

$$\Delta k = k_1 - k_2; \quad \Delta \omega = \omega_1 - \omega_2; \quad \frac{k_1 + k_2}{2} = \bar{k}; \quad \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \bar{\omega}$$

$$\Rightarrow \Psi(x, t) = \underbrace{e^{i(\bar{k}x - \bar{\omega}t)}}_{\text{oszilliert schnell}} \cdot 2 \underbrace{\cos \frac{1}{2}(\Delta k x - \Delta \omega t)}_{\text{oszilliert langsam} \Rightarrow \text{Einhüllende}}$$

(Skizze Schwebung) Ausbildung von Wellengruppen, die mit der Geschwindigkeit  $v_G$  der Einhüllenden fortschreitet.  $\cos \frac{1}{2}(\Delta k x_1 - \Delta \omega t_1) = \cos \frac{1}{2}(\Delta k x_2 - \Delta \omega t_2)$

$$\Delta k x_1 - \Delta \omega t_1 = \Delta k x_2 - \Delta \omega t_2$$

$$-\Delta \omega \underbrace{(t_1 - t_2)}_{-\Delta t} = \Delta k \underbrace{(x_2 - x_1)}_{\Delta x}$$

$$v_G = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} \quad (\text{Gruppengeschwindigkeit Phasengeschwindigkeit der Welle: } v_{Ph} = \frac{\omega}{k})$$

$v_G \neq v_{Ph}$  (Dispersion!)

immer noch unendlich ausgedehnt  $\rightarrow$  Aufbau einer Wellengruppe aus Überlagerung vieler ebener Wellen mit unterschiedlichem  $k \Rightarrow$  Fourierdarstellung!

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ikx} dk$$

z.B. Gaußpaket  $\rightarrow$  nach FT wieder Gauß

## 13 Unschärferelation

Es ist unmöglich, Impuls und Ort eines Teilchens exakt genau zu bestimmen.

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq h$$

Heisenbergsche Unschärferelation

Formulierung in Zeit und Energie:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq h$$

(formal nicht ganz richtig, funktional aber schon)

Wird im Alltag nicht beobachtet, da  $h$  so klein ist.

Beispiel: Beugung von Elektronen am Spalt. (Skizze Beugung Elektronen an Doppelspalt)

$p_x = 0 \Rightarrow \Delta p_x = 0 \Rightarrow \Delta x = \infty$  (vorm Spalt)

Spalt begrenzt Ausdehnung  $\Delta x = B \Rightarrow \Delta p_x \approx \frac{h}{B}$

Je kleiner Spaltbreite, desto größer Beugung.

## 14 Schrödingergleichung

klassische Wellengleichung:  $\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial t^2}$

$\rightarrow$  harmonische Wellen  $E(x,t) = E_0 \cdot \sin(kx - \omega t) = E_0 \cdot e^{i(kx - \omega t)}$

$$\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2} = -k^2 E_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

$$\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0 \cdot e^{i(kx - \omega t)}$$

$$\Rightarrow -k^2 = -\frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\omega = kc \quad E_{kin} = pc \quad \text{Dispersion (des Photon) } \omega = c k$$

### Schrödingergleichung für freies Teilchen

massebehaftetes Teilchen

$$E = \frac{p^2}{2m_0} = \hbar\omega \quad p = \hbar k$$

$$\Rightarrow \hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0} \quad \text{Dispersion eines Teilchens } \omega = \frac{\hbar k^2}{2m_0}$$

Beschreibung der Teilchenwolke mit  $\Psi(x,t) = A \cdot \exp(i(kx - \omega t))$

Was muss ich tun, um analog zu E.-M.-Welle richtige Dispersion zu erhalten?  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi =$

$$-k^2 \Psi \quad | \cdot \left(-\frac{\hbar^2}{2m_0}\right) \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m_0} \Psi$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi = -i\omega \Psi \quad | \cdot (i\hbar) \Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \hbar\omega \Psi$$

$$\Rightarrow \frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi$$

(Schrödingergleichung für freie Teilchen Schrödingergleichung ist nicht ableitbar: postuliert → experimentell bewiesen → beschreibt Quantenmechanik  $-\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 \Psi = E\Psi (= i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t})$

## Schrödingergleichung für Teilchen im Potential

$$\text{Energie} = \frac{\vec{p}^2}{2m_0} + V(\vec{r}) = E_{\text{Gesamt}}$$

$$\text{Operator} -\frac{\hbar^2}{2m_0}$$

$$\underbrace{\left[ \frac{\hbar}{2m_0} \nabla^2 + V(\vec{r}, t) \right]}_{=\text{Hamilton-Operator}=H} \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t)$$

zeitabhängige Schrödingergleichung bei Anwesenheit eines Potentials  $V(\vec{r}, t)$

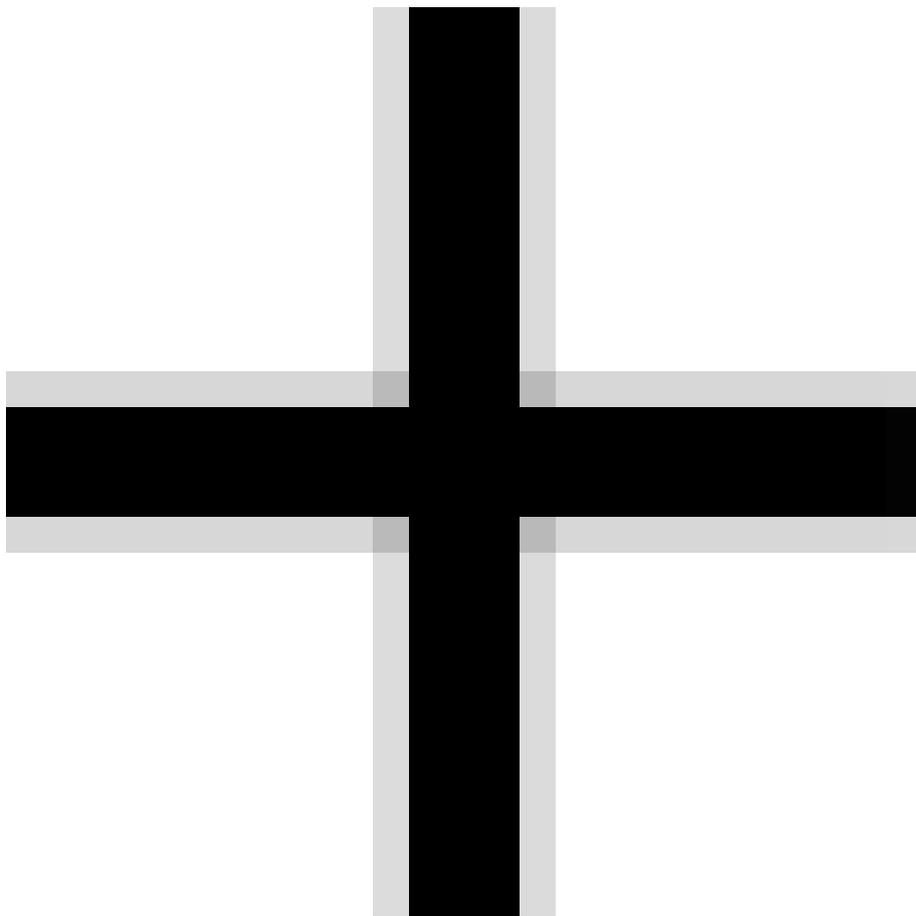
Wenn Potenzial nicht zeitabhängig, dann Übergang zur zeitunabhängigen S.-G.

$$\Psi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}) = e^{-i\omega t} = \phi(\vec{r}) e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$$

$$H\psi(\vec{r}) e^{-i\frac{Et}{\hbar}} = \underbrace{i\hbar \left(-i\frac{E}{\hbar}\right)}_{=E} \phi(\vec{r}) e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$$

$$H\phi(\vec{r}) = E\phi(\vec{r}) \quad \text{zeitunabhängige S.-G. (stationär)}$$

Beachte:  $|\Psi(\vec{r}, t)|^2 = \text{Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte am Ort } \vec{r} \text{ zur Zeit } t. \text{ für } \Psi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}) e^{-i\frac{Et}{\hbar}} \Rightarrow |\phi(\vec{r}) e^{-i\frac{Et}{\hbar}}|^2 = |\phi(\vec{r})|^2 \text{ stationäre Lösung}$



# Index

- AFM, 37
- Anormale Dispersion, 7
- Ausbreitungsgeschwindigkeit im Medium, 5
- Austrittsarbeit, 30
- Diamant, 6
- doppelbrechend, 10
- Fraunhofer-Beugung, 25
- Glasfaserkabel, 6
- Grenzflächencheneffekt, 5
- Hauptschnitt, 10
- Heisenbergsche Unschärferelation, 40
- Hohlraumstrahler, 27
- Kristallographische Hauptachse, 10
- Normale Dispersion, 7
- optisch anisotrop, 10
- optisch dünneres Medium, 5
- optisch dichteres Medium, 5
- optisch isotrop, 10
- Plancksches Wirkungsquantum, 31
- Poisson-Fleck, 25
- Raster-Kraft-Mikroskop, 37
- Raster-Tunnel-Mikroskop, 37
- Rasterelektronenmikroskop, 37
- Rayleigh-Jeans-Gesetz, 28
- Reflexion, 5
- Regenbogenentstehung, 7
- relativistischen Massenänderung, 35
- REM, 37
- Remission, 5
- Schwarzer Körper, 27
- Schwarzer Strahler, 27
- Snellius, 6
- spiegelnde Reflexion, 5
- Spiegelprisma, 6
- Stefan-Boltzmann-Gesetz, 28
- STM, 37
- Streuung, 5
- TEM, 37
- Totalreflexion, 6
- Transmissionselektronenmikroskop, 37
- Umkehrprisma, 6
- Wiensches Verschiebungsgesetz, 28
- Zahnradmethode (Fizeau), 4
- Zonenplatte, 26